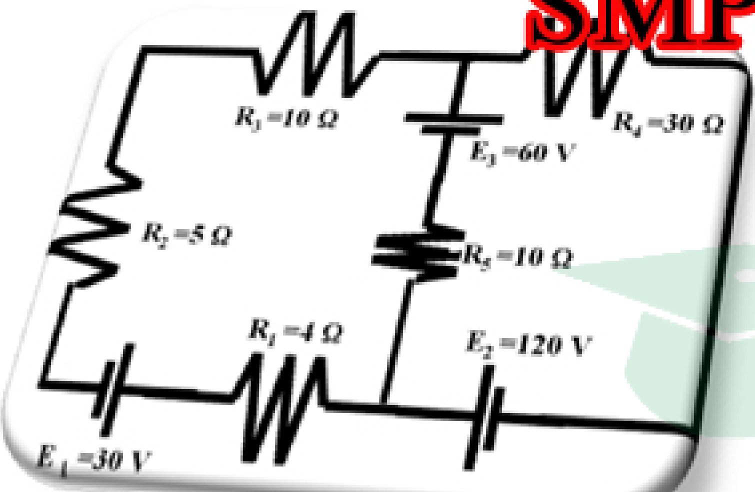
جامعة شعيب الدكالي
كلية العلوم

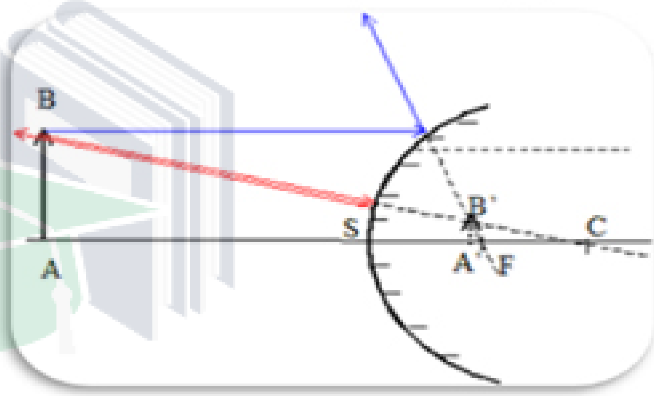
CORRECTION DES EXAMENS

éléctricité,optique,laiasson chimiques

SMPC2

...que ,analyse,algebre





éléctricité,optique,laiasson chimiques

chimie des solutions ,langue ,analyse,algebre

من إنجاز نادي النجاح

éléctricité,optique,laiasson chimiques
chimie des solutions ,langue ,analyse,algebre
éléctricité,optique,laiasson chimiques
chimie des solutions ,langue ,analyse,algebre

نادي النجاح كلية العلوم
success club

2éme EDITION

2014/2015

تم بفضل الله الإنتهاء من إعداد هذا المطبوع الذي شارك في إعداده كل من الطلبة :

عبد الهادي حملي ،عبد العزيز مقطفي ، إيمان أسس ،زكرياء المعيدن، هشام حباش،

محمد المالكي .

وتشكراتنا لكل من ساهم من قريب أو بعيد في إنجاز هذا التصحيح، الذي نتمنى أن يكون وسيلة إيجابية وفعالة في الرفع من مستوى التحصيل العلمي بالجامعة ، وان يجعل منه الطالب مرجع للتأكد من الطريقة المتبعة في الإجابة عن الأسئلة أثناء الامتحان .

ونتوجه بشكر خاص لكل من الأساتذة :

نورالدين الحوسيف ،محي الدين اباني ،إنعام العلوي العبدلاوي ،حميد نبدي، خالد الصريدي ،محمد لغدير.

لأي إستفسار المرجو مراسلتنا عبر:

Facebook : www.facebook.com/succes.club

نادي النجاح كلية العلوم الجديدة

e-mail : clubnajah2013@gmail.com

أو ولوج الموقع الإلكتروني للنادي

Site web : www.clubnajah.blogspot.com

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Eljadida.

Année Universitaire : 2012/2013
Filière SMPC, S2
Elément de module : Algèbre 2

Examen d'Algèbre 2 (Session de rattrapage)
Durée : 1h30mn

Exercice 1.

Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $T = D + N$ avec D une matrice diagonale et N une matrice dont la diagonale est nul.

2) Calculer N^2 et en déduire N^k pour $k \geq 2$.

3) Calculer DN et ND et en déduire T^n en fonction de N, D et n.

4) En déduire T^n en fonction uniquement de n.

Exercice 2.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'application linéaire
$f \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \longrightarrow (7x + 3y - 4z, -6x - 2y + 5z, 4x + 2y - z)$.

1) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ notée $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

2) Calculer le polynôme caractéristique de A.

3) Déterminer les deux valeurs propres de A notées λ_1 et λ_2 tel que $\lambda_1 < \lambda_2$.

4) Trouver un vecteur u tel que $E_{\lambda_2} = vect(u)$, en déduire la dimension de E_{λ_2}.

5) Trouver un vecteur v tel que $E_{\lambda_1} = vect(v)$, en déduire la dimension de E_{λ_1}.

6) Trouver un vecteur w tel que (v, w) soit une base de $Ker(A - \lambda_1 I)^2$.

7) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

8) On note par P la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, calculer P^{-1}.

9) Calculer $f(w)$ en fonction de v et w et en déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ notée $M(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$. Quelle relation existe entre $M(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ et la matrice A?

10) Calculer A^n en utilisant le résultat de l'exercice 1 question 4).

11) On consiḍère les suites u_n, v_n et w_n définies par :

$$u_{n+1} = 7u_n + 3v_n - 4w_n$$
$$v_{n+1} = -6u_n - 2v_n + 5w_n$$
$$w_{n+1} = 4u_n + 2v_n - w_n$$

avec $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 1$.

a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

b) En déduire que $X_n = A^n X_0$ et Calculer u_n, v_n et w_n en fonction uniquement de n.

Hicham HABACH

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Eljadida.

Année Universitaire : 2012/2013
Filière SMPC, S2
Elément de module : Algèbre 2

Examen d'Algèbre 2 (Session normale)
Durée : 1h30mn

Exercice 1.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'application
$\phi \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \longrightarrow (x - 4y - 4z, 8x - 11y - 8z, -8x + 8y + 5z)$.

Partie I :

1) Montrer que ϕ est linéaire.
2) Déterminer la matrice A de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
3) Calculer le déterminant de la matrice A et en déduire que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Partie II :

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.
2) Quelles sont les dimensions des sous-espaces propres E_1 et E_{-3} associées aux valeurs propres 1 et -3 ?
3) Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs propres de A.
4) Trouver une matrice carrée inversible Q d'ordre 3 et une matrice diagonale Δ d'ordre 3 telles que $A = Q^{-1}\Delta Q$. Que dire de l'automorphisme ϕ ?

Exercice 2. On considère le système suivant :

$$(S_m) \begin{cases} x + y + z & = 1; \\ x + 2y + mz & = 1; \\ x + 4y + m^2 z & = \text{m}. \end{cases}$$

1) Calculer le déterminant du système (S_m).
2) En utilisant la question 1), résoudre et discuter le système (S_m) suivant les valeurs du paramètre réel m.

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

CHOUAIB DOUKKALI

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT UNIVERSITE DE MATHEMATIQUES

EL JADIDA

A.U 2011/2012

FILIERE : SMPC

ELEMENT DE MODULE :algèbre 2

Epreuve de rattrapage d'algèbre II

Exercice I :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice identité I_3 .

A tout nombre réel x on associe la matrice $M(x) = I_3 + xA + \frac{x^2}{2} A^2$ **(1)**

1) Calculer A^2 , A^3 et A^n pour n>3.

2) Calculer en utilisant la formule (1) **M(x)M(y)** et montrer que

$$M(x)M(y) = M(x+y) \quad (2)$$

3) Montrer que $M^n(x) = M(nx)$ pour n dans N

4) Ecrire les matrices **M(x)** et $(M(x))^n$ sous forme de tableau

$M(x) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

5) a- Montrer que **M(x)** est inversible sans calculer l'inverse de **M(x).**

b- Déterminer **M(0)**

c- calculer l'inverse de **M(x)** en utilisant la formule (2).

5) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, en utilisant la question 4)

calculer B^{-1} et B^n , n est un entier (Indication : **B =M(x)**

Tourner la page SVP

Exercice 2 :

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x + y, x + y + z, -y + z)$$

1) *a – Déterminer la matrice **A** de **f** dans la base canonique*

   (A = M(f, B,B))

   *b- On note par $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de **A** .*

   Calculer $P_A(X)$

   c- En déduire les valeurs propre de A et leur ordre de multiplicité.

2) *Déterminer une base de **Ker(f-id).***

3) *Montrer que **A** n'est pas diagonalisable.*

4) *Expliquer pourquoi **A** est trigonalisable.*

5) *Soit u un vecteur de la base de **Ker(f-id).***

   a. *Chercher un vecteur v tel que {u ,v} soit une base de **Ker(f-id)^2**.*

   b. *Chercher un vecteur w=(x ,y ,z) tel que : **(f-id)w=v.***

   c. *Montrer que **C**={u ,v ,w} est une base de R^3.*

   d. *Ecrire la matrice de f dans la base **C.***

ELMALKI

Département Maths **Examen** ALGEBRE 2

Durée : 1h30mn

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRESIDENT

EXERCICE 1.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

1. Calculer B^3. En déduire que $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.
3. Montrer que si λ est valeur propre de A alors λ^k est valeur propre de A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (*faites une démonstration par récurrence sur* k).
4. En déduire que A n'est pas diagonalisable (*raisonner par l'absurde*).

EXERCICE 2.

Soit l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x,y,z) = (2x + 3y, -x + z)$$

Soit A la matrice de φ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Répondre par VRAI ou FAUX sans donner de justification.

1. La matrice A est du type $(3,2)$.
2. La matrice A est égale à $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. L'application φ est **surjective**.
4. Le noyau $Ker(\varphi)$ est de **dimension 1**.
5. Une base de $Ker(\varphi)$ est le vecteur $(2,3,2)$. F

EXERCICE 3.

Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre réponse.

1. E, F de dimensions finies. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors
$$\mathbf{rg}(f) \leq \mathbf{Inf}(\mathbf{dim}(E), \mathbf{dim}(F)).$$
2. E, F de dimensions finies. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective, alors l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $(x,y,z) \to (2x + 3y, z - x)$ est un isomorphisme.
4. Si $L = (a \ \ b \ \ c \ \ d)$ et $C = \begin{pmatrix} d \\ -c \\ b \\ -a \end{pmatrix}$, alors $(CL)^{2012} = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$.
5. Si une matrice A est inversible alors elle est diagonalisable.

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE Mathématiques
Et Informatique EL JADIDA

ANNEE UNIVERSITAIRE 2010-2011
Filières : SMPC II
Elément de Module : algèbre 2
Responsable : N.E. EL HOUSSIF

Epreuve de rattrapage D'Algèbre 2

(Durée : 1h 30mm)

EXERCICE 1: On considère les deux applications suivantes:

$f : R^2 \to R^3$ et $g : R^3 \to R^2$

$(x,y) \to (x+y, x-y, 2x+3y)$ $(x,y,z) \to (-x-y+2z, 3x-5y+6z)$.

Soient $B_2 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ la base canonique de R^2 et

$B_3 = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de R^3

1) a) Montrer que f et g sont des applications linéaires.
b) Donner les matrices suivantes :
$M(f;B_2,B_3)$, $M(g;B_3,B_2)$, $M(f \circ g;B_3,B_3)$ et $M(g \circ f;B_2,B_2)$.
c) En déduire les expressions de $f \circ g(x,y,z)$ et de $g \circ f(x,y)$.
d) Déterminer Ker (f), Im(f), Ker(g) et Im(g)

2) On pose $f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2$,
$w_1 = v_1 - v_2 + v_3$, $w_2 = v_1 + v_2 - v_3$ et $w_3 = -v_1 + v_2 + v_3$
Montrer que $B_2' = \{f_1, f_2\}$ est une base de R^2 et que $B_3' = \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de R^3.

3) a) Donner la matrice P de passage de la base B_2 à la base B_2' et calculer P^{-1}
b) Donner la matrice Q de passage de la base B_3 à la base B_3' et calculer Q^{-1}

4) Ecrire la matrice
a) $M(f : B_2', B_3)$ b) $M(f : B_2', B_3')$ c) $M(g : B_3', B_2')$ d) $M(f \circ g : B_3', B_3')$

5) Résoudre les systèmes suivants :
a) $f(x,y) = (a,b,c)$ b) $f(x,y,z) = (a,b)$, où $a,b,c \in R$

EXERCICE 2: On considère le système suivant: $(S_m)\begin{cases} x+y+z = m+1 \\ mx+y+(m-1)z = m \\ x+my+z = 1 \end{cases}$

1) Calculer le déterminant de (S_m)
2) Résoudre et Discuter le système (S_m) suivant les valeurs du paramètre réel m.

****

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRESIDENT

examen d'algèbre 20, 2/2013

Rattrapage

Abdlaziz

Ex 1

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) on montre que $T = D + N$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d'où $T = D + N$

2) $N^2 = N \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N^k = N^{k-2} N^2$ $\quad N^k$ pour $k \geq 2$

$N^k = \cancel{N^2} N^{k-2} \cdot 0$

$= 0$

car on a $k \geq 2$, $N^2 = 0$

on remarque que $N^k = 0$ et k vérifie la propriété

On effet : $N^{k+1} = N N^{k}$

$= N \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \forall k \geq 2 \quad N^{k} = 0$

3) $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{DN = ND}$

alors on peut appliquer la formule du Binome de Newton

On $(D+N)^{n}$ aussi on a

donc $\boxed{T^{n} = (D+N)^{n}}$

4) $T^{n} = (D+N)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} N^{k} D^{n-k}$

~~$= C_{0}^{n} I_{3} D^{n} + C_{1}^{n} N D^{n-1} + C$~~

$= C_{n}^{0} I_{3} D^{n} + C_{n}^{1} N D^{n-1} + C_{n}^{2} N^{2} D^{n-2} + \dots + \underbrace{C_{n}^{n} N^{n}}_{=0}$

On $DN = ND$ $\quad T^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} N^{k} D^{n-k}$

$= C_{n}^{0} I_{3} D^{n} + C_{n}^{1} N D^{n-1} + C_{n}^{2} N^{2} D^{n-2}$

avec $N^{k} = 0$

$C_{n}^{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$

$C_{n}^{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n.$

avec $0! = 1$ et $1! = 1$

donc $\boxed{T^n = D^n + n D^{n-1} N}$

On a $D^{n-1} N = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>ex 2</u>

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \to (7x + 3y - 4z, -6x - 2y + 5z, 4x + 2y - z)$

1) $B = \{ e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \}$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = M_B(f)$$

2) $P_A(X) = \det |A - X I_3|$

$$= \begin{vmatrix} 7-X & 3 & -4 \\ -6 & -2-X & 5 \\ 4 & 2 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 3 & -4 \\ -2(1-X) & (-2-X) & 5 \\ 0 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & -2-X & 5 \\ 0 & 2 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$P(X) = (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 4-X & -3 \\ 0 & 2 & -1-X \end{vmatrix} L_2 + 2L_1$$

$$= (1-X)\left[(4-X)(-1-X)+6\right]$$
$$= (1-X)(2+X^2-3X)$$
$$= (1-X)(X-2)(X-1)$$
$$= -(X-1)^2(X-2)$$

3) les valeurs propres de A sont :

$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$ | $\dim E_\lambda \leq$ multiplicité de λ dans P_A

4) $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est une vecteur propres de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$

$$AX = \lambda I X$$

$$AU = \lambda_2 U \Leftrightarrow AU = 2U$$

$$\Leftrightarrow AU - 2U = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - 2I)U$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 7x+3y-4z = 2x \\ -6x-2y+5z = 2y \\ 4x+2y-z = 2z \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y-4z = 0 \\ -6x-4y+5z = 0 \\ 4x+2y-3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y-4z = 0 \\ -2y+z = 0 \\ 2y-z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y-4z = 0 \\ -2y+z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow E(\lambda_2) = Vect\langle 1, 1, 2 \rangle$$

$E(\lambda_2)$ est engendré par un seul vecteur

$\Rightarrow \dim(E(\lambda_2)) = 1$

5). $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$

$$AX = \lambda I X$$

$$AV = \lambda_1 V \Leftrightarrow AU = U$$

$$\Leftrightarrow AU - U = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - I)U = 0$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 3y - 4z = x \\ -6x - 2y + 5z = y \\ 4x + 2y - z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y - 4z = 0 \\ -6x - 3y + 5z = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$6x + 3y - 4z = 0$$

$$z = 0$$

$$2x + y = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$$

$E(\lambda_1) = sev < 1, -2, 0 >$

$E(\lambda_1)$ est engendré par seul vecteur

$\Rightarrow \dim(E(\lambda_1)) = 1$

6) $w = ?$ / $\{u, w\}$ soit une base de $\ker(A - \lambda_1 I_3)^2$

$\lambda_1 = 1$

$v = t(1, -2, 0)$

$\ker(A - \lambda_1 I)^2$

$$(A - \lambda_1 I)^2 = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_1 I)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - I)^2 \Leftrightarrow (A - I)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x,y,z) = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $v \in \ker(A-I)^2$

de plus si a par $w = f(0,1,1)$

alors on a $rg(v,w) = 2 \Rightarrow \{v,w\}$ est un base de $\ker(A-I)^2$

7) On montre que $B' = (u,v,w)$ est base de $\mathbb{R}^3$

a $rg\, B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v-u \\ w \end{matrix}$

$= rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

B' est un famille libre $\Rightarrow B'$ est base de $\mathbb{R}^3$ car $\text{card}\, B' = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

8) $P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_{B'B} = P_{BB'}^{-1}$

a calculons $P_{\beta\beta'}^{-1}$ en effet

soit $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ $\exists ?$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ /

tel que $P_{BB'}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.*

$$* \iff \begin{cases} x+y=a \\ x-2y+z=b \\ 2x+z=c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ -3y+z=b-a \\ -2y+z=c-2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ z-3y=b-a \\ y=c-2a-b+a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a+a+b-c=2a+b-c \\ z=\cancel{b}-a-3a-3b+3c=-4a-2b+3c \\ y=-a-b-c \end{cases}$$

$$P_{\beta'\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

9) $f(u) = (-1,3,1) = \alpha v + \beta w$

$= \alpha(1,-2,0) + \beta(0,1,1)$

$\iff \begin{matrix} \alpha = -1 \\ -2\alpha+\beta = 3 \end{matrix}$

$\beta = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1 \text{ et } \beta = 1}$

donc $\boxed{f(w) = -v + w}$

$$B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}$$

$$\begin{cases} f(u) = 2u \\ f(v) = v \\ f(w) = -v + w \end{cases}$$

$B = M(f, B', B')$

d'après la formule de changement de base

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A"] & B \\ B' \arrow[u, "P^{-1}"] & B' \arrow[u, "P"'] \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

$\boxed{M(f; B', B') = P^{-1} A P}$

10)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = (D + N)$$
$$B^n = (D + N)^n$$

On $B = P^{-1} A P$

$$\Leftrightarrow \boxed{A = P B P^{-1}}$$

$$A^n = P B^n P^{-1}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$N^2 = 0$ d'autre part

On calcule $DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k D^{n-k}$$

$$= C_n^0 I D^n + C_n^1 N D^{n-1}$$

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1 \qquad C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$$

$$(D+N)^n = D^n + n N D^{n-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n N \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^n$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 1 & -n \\ 2^{n+1} & -2 & -2n \\ 2^{n+1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 4n - 1 + 2^{n+1} & 2n - 1 + 2^n & -3n + 1 + 2^n \\ 8n + 2 + 2^{n+2} & 2^{n+1} + 2 + 4n & 2^{n+1} - 2 - 6n \\ 2^{n+2} & 2^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

11)

a) on montre que $X_{n+1} = AX_n$.

on $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$

alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7U_n + 3V_n - 4W_n \\ -6U_n - 2V_n + 5W_n \\ 4U_n + 2V_n - W_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$

$= AX_n$

donc $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$

b) on a $X_{n+1} = AX_n$

$\Leftrightarrow \frac{X_{n+1}}{X_n} = A$

donc X_n suite géométrique de raison A

alors $\boxed{X_n = A^n X_0}$

$X_n = A^n X_0$

$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = A^n X_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n-1+2^{n+1} & 2^n+2n-1 & 2^n-3n+1 \\ 8n+2+2^{n+2} & 2+2^{n+1} & 2^{n+1}-2-6n \\ 2^{n+2} & 2^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_n = 2\,2^{n} - n \\ v_n = 2\,2^{n+1} - 6n \\ w_n = 2\,2^{n+1} \end{cases}$$

لا تكره أحد مهما أخطأ في حقك

عش في بساطة مهما علا شأنك

توقع خيرا مهما كثر البلاء.

اعط كثيرا لو حرمت.

Corrigé examen d'algèbre 2012/2013

Session normale

ex 1 :

$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (x-4y-4z, 8x-11y-8z, -8x+8y+5z)$

Partie I :

1) On montre que ϕ est linéaire

soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda u + v) = f(\lambda x + a, \lambda y + b, \lambda z + c)$$

$$= \lambda x + a - 4(\lambda y + b) - 4(\lambda z + c) ; 8(\lambda x + a) - 11(\lambda y + b) - 8(\lambda z + c) ; -8(\lambda x + a) + 8(\lambda y + b) + 5(\lambda z + c)$$

$$= \lambda x + a - 4\lambda y - 4b - 4\lambda z - 4c, 8\lambda x + 8a - 11\lambda y - 11 - 8\lambda z - 8c, -8\lambda x - 8a + 8\lambda y + 8b + 5\lambda z + 5c$$

$$= \lambda x - 4\lambda y - 4\lambda z + a - 4b - 4c, 8\lambda x - 11\lambda y - 8\lambda z + 8a - 11b - 8c, -8\lambda x + 8\lambda y + 5\lambda z - 8a + 8b + 5c$$

$$= (\lambda x - 4\lambda y - 4\lambda z, 8\lambda x - 11\lambda y - 8\lambda z, -8\lambda x + 8\lambda y + 5\lambda z) + (a - 4b - 4c, 8a - 11b - 8c, -8a + 8b + 5c)$$

$$= \lambda(x - 4y - 4z, 8x - 11y - 8z, -8x + 8y + 5z) + (a - 4b - 4c, 8a - 11b - 8c, -8a + 8b + 5c)$$

$$= \lambda f(x,y,z) + f(a,b,c)$$

$$= \lambda f(u) + f(v)$$

donc ϕ est linéaire

2) On détermine la matrice A de ϕ dans B

On a $B = (e_1, e_2, e)$

$e_1 = (1,0,0) \cdot e_2 = (0,1,0) \cdot e_3 = (0,0,1)$

On calcule $f(e_1) \cdot f(e_2)$ $f(e_3)$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1, 8, -8)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (-4, -11, 8)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (-4, -8, 5)$

donc $A = \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & +8 & 5 \end{pmatrix}$$

3) $\det A = \det \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{vmatrix}$

$$\to \quad = \det \begin{vmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 0 & 21 & 24 \\ 0 & -24 & -27 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1 \end{array}$$

$$= (-1)^{1+1} \det \begin{vmatrix} 21 & 24 \\ -24 & -27 \end{vmatrix}$$

$$= -567 + 576$$

$$\boxed{\det A = 9}$$

on a $\det A \neq 0$ donc ϕ est un automorphisme

Patie II

1) $P(\lambda) = |A - \lambda I|$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 & -4 \\ 8 & -11-\lambda & -8 \\ -8 & 8 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

2) les dimensions des sous-espaces propre E_1 et E_{-3} associées aux valeurs propre 1 et -3 sont

on cherches les vecteurs propres ~~et~~ associés les valeurs propre de A

On $AX = \lambda I X$

Pour $\lambda = 1$

$$AX = IX \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y - 4z = x & (1) \\ 8x - 11y - 8z = y & (2) \\ -8x + 8y + 5z = z & (3) \end{cases}$$

(1) $x - 4y - 4z = x$

$\Leftrightarrow -4y - 4z = 0$

$\Rightarrow \boxed{y = -z}$ (4)

On replace (4) dans (3) et on obtient

$-8x - 8z + 5z = z$

$\Leftrightarrow -8x - 8z + 4z = 0$

$-8x - 4z = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} z$

$X_1 = (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2} z, -z, z\right)$

$= z\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right) = z < -1, -2, 2 >$

on $(-1,-2,2)$ est base

$X_1 = \ker V\langle -1,-2,2\rangle\rangle$

on pose que $(-1,-2,2) = \omega$

donc dim $X_1 = 1$

Pour $\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = -3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y - 4z = -3x & (1) \\ 8x - 11y - 8y = -3y & (2) \\ -8x + 8y + 5z = -3z & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow x - 4y - 4z = -3x$

$\Leftrightarrow x + 3x - 4y - 4z = 0$

$4x - 4y - 4z = 0$

$\Rightarrow x = y + z.$

donc $X_1 = (x, y, z)$

$= (y+z, y, z) \quad y, z \in \mathbb{R}$

$= (y, y, 0) + (z, 0, z)$

$= y(1,1,0) + z(1,0,1)$

on pose $u = (1,1,0) \quad v = (1,0,1)$

$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$

$\Big\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\Big\|$ $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$

donc u et v est libre

alors u, et v est un base $\mathbb{R}^2$

on finalle

$$X_3 = sev\langle u, v\rangle$$

$$\dim X_3 = 2.$$

3) on a $w = (-1, -2, 2)$ $u = (1, 1, 0)$. $v(1, 0, 1)$

donc la base de $\mathbb{R}^3$ constitué des vecteurs propres de A est donné par

$$B' = (w, u, v)$$

4) On a $A = Q^{-1} \Delta Q$

$$\Rightarrow \Delta = Q A Q^{-1}$$

on Q la matrice associe les vecteurs propres de A

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q^{-1} la matrice de Passage de B a B'

$$\begin{cases} e_1 = xw + yu + zv \; (*) \\ e_2 = xw + yu + zv \; (**) \\ e_2 = xw + yu + zv \; (***) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ * $e_1 = xw + yu + zv$

$$(1, 0, 0) = x(-1, -2, 2) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$$

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \; (1) \\ -2x + y = 0 \; (2) \\ +2x + z = 0 \; (3) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (2) \Rightarrow \\ (3) \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} y = 2x. \; (4) \\ z = -2x. \; (5) \end{cases}$$

on replace 4 et 5 dans 1 on obtient que $-x + 2x - 2x = 1$

$x = -1$
$y = -2$
$z = 2.$

**

$e_2 = x(-1,-2,2) + y(1,1,0) + z(1,0,1)$

$(0,1,0) = x(-1,-2,2) + y(1,1,0) + z(1,0,1)$

$\Rightarrow \quad -x + y + z = 0$ 3

$-2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 + 2x.$ 1

$2x + z = 0 \qquad z = -2x$ 2

on replace 1 et 2 dans 3.

$-x + 1 + 2x - 2x = 0$

$-x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$y = 3$

$z = -2.$

(***) $e_3 = xw + yu + zv$

$(0,0,1) = x(-1,-2,2) + y(1,1,0) + z(1,0,0)$

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 & ① \\ -2x + y = 0 & ② \\ 2x + z = 1 & ③ \end{cases}$$

② $\Rightarrow y = 2x.$

③ $\Rightarrow z = 1 - 2x.$

on replace ~~que~~ 2 et 3 dans 1

$-x + 2x + 1 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = 1 \quad y = 2. \quad$ et $z = -1$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

__Ex 2__

$$S_m = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + mz = 1 \\ x + 4y + m^2 z = m. \end{cases}$$

1) $\det S_m = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 4 & m^2 \end{vmatrix}$

$= \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m-1 \\ 0 & 3 & m^2-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$

$= \det \begin{vmatrix} 1 & m-1 \\ 3 & m^2-1 \end{vmatrix}$

$= m^2 - 1 - 3(m-1)$

$= m^2 - 1 - 3m + 3$

$\boxed{\det S_m = m^2 - 3m + 2}$

2) $\det S_m \neq 0$ si $m \neq 1$ et $m \neq 2$.

le système de Cramer.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ m & 4 & m^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m-1 \\ 0 & 4-m & m^2-m \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= m^2 - m - (4-m)(m-1)$$

$$= m^2 - m - (4m - 4 - m^2 + m)$$

$$= m^2 - m - 5m + 4 + m^2$$

$$= 2m^2 - 6m + 4$$

$$x = \frac{2m^2 - 6m + 4}{m^2 - 3m + 2} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & m^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & m^2-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & m-1 \\ m-1 & m^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= -(m-1)^2$$

$$y = \frac{-(m-1)^2}{m^2 - 3m + 2}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & m \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & m-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & m-1 \end{vmatrix} = m-1$$

$$z = \frac{m-1}{m^2-3m+2}$$

$$S = \left\{ 2, \frac{-(m-1)^2}{m^2-3m+2}, \frac{m-1}{m^2-3m+2} \right\}$$

2ème cas

$m = 2$ et $m = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + 4y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

le système est incompatible

donc $S = \emptyset$

$m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$x + y + z = 1$$
$$y = 0$$

$$x + z = 1$$
$$x = 1 - z$$

$$\boxed{S = \{(1-z, 0, z),\ z \in \mathbb{R}\}}$$

Corrigé d'Epreuve de
Rattrapage d'Algèbre 2
SMPC II

2011/2012 ratt

Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(x) = I_3 + xA + \frac{x^2}{2}A^2$$

1°) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $n > 3$ on a $A^n = \underbrace{A \times \cdots A}_{n \text{ fois}}$

$$= A^3 \times \underbrace{A \times \cdots A}_{(n-3) \text{ fois}}$$

$$= 0 \times A^{n-3} = 0$$

et donc $A^n = 0 \quad \forall n \geq 3$

2°) $$M(x)M(y) = \left(I_3 + xA + \frac{x^2}{2}A^2\right)\left(I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2\right)$$

$$= I_3^2 + yA + \frac{y^2}{2}A^2 + xA + xyA^2 + \frac{xy^2}{2}A^3 + \frac{x^2}{2}A^2 + \frac{x^2}{2}yA^3 + \frac{x^2y^2}{4}A^4$$

or : $A^3 = A^4 = 0$ et donc

$$M(x)M(y) = I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2 + xA + xyA^2 + \frac{x^2}{2}A^2$$

$$= I_3 + (x+y)A + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2)A^2$$

$$= I_3 + (x+y)A + \frac{(x+y)^2}{2}A^2$$

$$= M(x+y)$$

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRESIDENT

3°) <u>Démonstration par récurrence</u> :

pour $n = 0$ on a $(M(x))^0 = I_3$

et $M(0 \times x) = M(0) = I_3$

donc la propriété est vrai pour $n = 0$

On suppose que la propriété est vrai pour n <u>c.à.d</u>

$(M(x))^n = M(nx)$ et on vérifie pour $n+1$. <u>En effet</u> :

$$(M(x))^{n+1} = (M(x))^n \times M(x) = M(nx) \times M(x)$$

$$= M(nx + x)$$

$$= M((n+1)x)$$

car $M(x) \cdot M(y) = M(x+y)$

<u>et donc</u> $\forall n \in \mathbb{N}$ $(M(x))^n = M(nx)$.

1°) $M(x) = I_3 + xA + \frac{x^2}{2} A^2$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^2/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M(x))^n = M(nx) = \begin{pmatrix} 1 & nx & \frac{(nx)^2}{2} \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & nx & \frac{n^2x^2}{2} \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5°) a) on a $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire $\Rightarrow \det(M(x)) = 1 \times 1 \times 1 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow M(x)$ est inversible.

b) $M(0) = I_3$

c) on a $M(0) = M(x-x) = M(x) \cdot M(-x)$

$\Rightarrow M(x) \cdot M(-x) = M(0) = I = M(-x) \cdot M(x)$

$\Rightarrow M(x)$ est inversible et $(M(x))^{-1} = M(-x)$

c.à.d $(M(x))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5°) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{(4)^2}{2} \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(4)$

donc $B = M(4)$

$\Rightarrow B^{-1} = (M(4))^{-1} = M(-4) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^n = (M(4))^n = M(4n)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 4n & \frac{(4n)^2}{2} \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4n & 8n^2 \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

1°) a) $A = M_B(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

$f(e_1) = (1, 1, 0)$; $f(e_2) = (1, 1, -1)$; $f(e_3) = (0, 1, 1)$

b) $P_A(x) = \det(A - xI)$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 1-x \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix} L_1 + L_3$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$C_3 - C_1$

$$= (1-x)(1-x)^2 = (1-x)^3$$

c) les valeurs propres de A sont 1 : d'ordre 3.

2°) $(x,y,z) \in \ker(f - id) \Leftrightarrow (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y,z) = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$

$\Rightarrow \ker(f - id)$ est le sous espace vectoriel engendré par

~~{(1,0,-1~~ $\{(1, 0, -1)\}$

$\Rightarrow \{(1, 0, -1)\}$ est une base de $\ker(f - id)$

3°) E_1 = le sous espace propre de A associé à 1.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow f(x,y,z) = (x,y,z)$

$\Leftrightarrow f(x,y,z) - (x,y,z) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (f - id)(x,y,z) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (x,y,z) \in \ker(f - id)$

$\Rightarrow E_1 = \ker(f-id)$ $\dim \ker(f-id) = 1$

$\Rightarrow \dim E_1 = 1 < 3$ = multiplicité de la valeur propre 1 de P_A.

$\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable.

4°) on a $P_A(X) = (1-X)^3$ est un polynôme scindé dans $\mathbb{R}[X]$ $\Rightarrow$ A est trigonalisable.

5°) $u = (1, 0, -1)$

a) $(x,y,z) \in \ker(f-id)^2 \Leftrightarrow (A - I)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow z = -x$

$\Rightarrow (x,y,z) = (x, y, -x) = x\underbrace{(1,0,-1)}_{u} + y\underbrace{(0,1,0)}_{v}$

$\Rightarrow \{u, v\}$ est une Base de $\ker(f-id)^2$.

$v = (0, 1, 0)$

b) $w = (x,y,z)$? / $(f - id)\,w = v$

$(f - id)(w) = v \Leftrightarrow (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 - x \end{cases}$ on peut prendre $x = 0$

et on aura $W = (0, 0, 1)$

$C = \{u, v, w\}$

on a $rg\{u, v, w\} = rg \begin{pmatrix} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

$\Rightarrow \{u, v, w\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \{u, v, w\}$ est une Base de $\mathbb{R}^3$

d) * $u \in \ker(f - id) \Rightarrow (f - id)(u) = 0$

$\Rightarrow f(u) - u = 0$

$\Rightarrow f(u) = u$

$= 1 \times u + 0v + 0w$

* $f(v) = f(0, 1, 0) = (1, 1, -1)$

$= (1, 0, -1) + (0, 1, 0)$

$= u + v$

$= 1 \times u + 1 \times v + 0.w$

* $(f - id)w = v \Rightarrow f(w) - w = v$

$\Rightarrow f(w) = v + w$

$= 0 \times u + 1 \times v + 1 \times w$

c/c $M_C(f) = $

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \end{array}$$

CLUB NAJAH
UCO.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Correction Examen
Algèbre II SMPCI
(2011 - 2012)

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1°) $$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc $$B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B^3 = 0 \Leftrightarrow (A - I)^3 = 0$ or $AI = IA$ donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton

$$\Rightarrow (A - I)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k A^k (-I)^{3-k}$$

$$= C_3^0 I \times (-I)^3 + C_3^1 A (-I)^2 + C_3^2 A^2 (-I)^1 + C_3^3 A^3 (-I)^0$$

$$= -I + 3A - 3A^2 + A^3$$

$$\Rightarrow (A - I)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$$

2°) on a $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0 \Leftrightarrow A^3 - 3A^2 + 3A = I$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(A^2 - 3A + 3I) = I & (1) \\ \text{et} & \\ (A^2 - 3A + 3I)A = I & (2) \end{cases}$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ A inversible et $A^{-1} = (A^2 - 3A + 3I)$

i.e $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

3°) $k=1$ λ est une valeur propre de $A \Rightarrow \lambda^1$ est 1 valeur propre de A

$k=2$ soit λ valeur propre de A

$\Rightarrow \exists\, v \neq 0$ un vecteur : $Av = \lambda v$

$\Rightarrow A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$

$v \neq 0$ et $A^2 v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda^2$ est une valeur propre de A^2.

Supposons que λ valeur propre de $A \Longrightarrow \lambda^k$ est une valeur propre de A^k et

Montrons que λ^{k+1} est une valeur propre de A^{k+1}

En effet : λ valeur propre de $A \Rightarrow \exists\, v \neq 0$ (un vecteur non nul) tel que $\boxed{Av = \lambda v}$

$$A^{k+1} v = A(A^k(v)) = A(\lambda^k v)$$
$$= \lambda^k (Av) = \lambda^k(\lambda v)$$
$$= \lambda^{k+1} v.$$

$v \neq 0$ et $A^{k+1}(v) = \lambda^{k+1}(v) \Rightarrow \lambda^{k+1}$ est une valeur propre de A^{k+1}.

4°) soit λ valeur propre de $A \Rightarrow \exists\, v \neq 0$ tel que

$Av = \lambda v \Rightarrow \begin{cases} A^2 v = \lambda^2 v \\ A^3 v = \lambda^3 v \end{cases}$ on applique

$A^3 - 3A^2 + 3A - I$ à v et on obtient :

$$A^3(v) - 3A^2 v + 3Av - v = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^3 v - 3\lambda^2 v + 3\lambda v - v = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) v = 0$$ or $v \neq 0 \Rightarrow$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0$$

On déduit que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de A et elle est d'ordre $\underline{3}$

Donc si A diagonalisable alors $\exists P$ inversible tel que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$ les valeurs propres de A

$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P I P^{-1} = P P^{-1} = I$

$\Rightarrow A = I$ ce qui est absurde car $A \neq I$

Exercice 2

$\begin{cases} B & \text{la base canonique de } \mathbb{R}^3 \\ B' & \text{" " de } \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2\}$

$$A = M_{BB'}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \end{array} \quad (*)$$

$\varphi(e_1) = (2, -1)$

$\varphi(e_2) = (3, 0)$

$\varphi(e_3) = (0, 1)$

1°) $\underline{\text{Faux}}$ car A est de type $(2, 3)$

2°) $\underline{\text{Vrai}}$ car $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'après $(*)$

3°) $rg(A) = 2$ car $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$rg(A) = 2 \Rightarrow rg(\varphi) = \dim Im(\varphi) = 2$ or $Im(\varphi) \subset \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow Im(\varphi) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \varphi$ est surjective donc

la réponse est $\underline{\text{Vrai}}$

4°) Vrai

car $\dim \ker(\varphi) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$
$= 3 - 2 = 1$

5°) faux

car $\varphi(2,3,2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ \cdot \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3

1°) Vrai

car on a $rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$

$\mathrm{Im}(f) \subset F \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = rg(f) \leq \dim F$ ①

d'autre part $\dim E = rg(f) + \dim(\ker(f))$

$\Rightarrow rg(f) = \dim E - rg(f) \leq \dim E$ ②

① et ② $\Rightarrow rg(f) \leq \mathrm{Inf}(\dim E ; \dim F)$

2°) Vrai En effet soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de vecteur libre de E et montrons que $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ est libre, pour cela soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_n f(u_n) = 0$ (*) ; f est linéaire

(*) $\Rightarrow f(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n) = 0$, or f injective

$\Rightarrow \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre $\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$

C/C $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ est libre.

3°) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, \quad) \longrightarrow (2x+3y, z-x)$:

$\dim \mathbb{R}^3 \neq \dim \mathbb{R}^2$, d on ne peut pas ~~avoir~~ avoir une application linéaire bijective $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et en plus un endomorphisme on doit ~~avec~~ avoir $f : E \longrightarrow E$

donc la réponse est : **Faux**

4°) **Vrai** car $(CL)^2 = (CL) \times (CL)$

$$= C\,(LC) \times L$$

Or : $(LC) = \cancel{(a,b,c,d)} = (a \;\; b \;\; c \;\; d)\begin{pmatrix} d \\ -c \\ b \\ -a \end{pmatrix}$

$$= ad - bc + bc - ad = 0$$

$\Rightarrow (CL)^2 = C \times 0 \times L = 0$

$\Rightarrow (CL)^n = 0 \quad \forall\, n \geq 2$

$\Rightarrow (CL)^{2012} = 0$

5°) **Faux** car d'après l'exercice 1 on a

A inversible mais elle n'est pas diagonalisable.

~~Exercice~~

Rattrapage D'Algebre (2010-2011)

Exercice 1:

1- a) * $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \rightarrow (x+y, x-y, 2x+3y)$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $X=(x, y)$ $Y=(x', y') \in \mathbb{R}^2$

$f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$

$= ((\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y'), (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y'), 2(\alpha x + \beta x') + 3(\alpha y + \beta y'))$

$= \alpha(x+y, x-y, 2x+3y) + \beta(x'+y', x'-y', 2x'+3y')$

$= \alpha f(x, y) + \beta f(x', y')$

donc f est une application linéaire

* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z) \longrightarrow (-x-y+2z, 3x-5y+6z)$

soient $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad U=(x, y, z)$ et $V(x', y', z') \in \mathbb{R}$

$f(\alpha U + V) = f(\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z')$

$= (-(\alpha x + x') - (\alpha y + y') + 2(\alpha z + z'), 3(\alpha x + x') - 5(\alpha y + y') + 6(\alpha z + z'))$

$= (-\alpha x - \alpha y + 2\alpha z - x' - y' + 2z'), (3\alpha x - 5\alpha y + 6\alpha z + 3x' - 5y' + 6z')$

$= \alpha(-x-y+2z) + (-x'-y'+2z'), \alpha(3x-5y+6z) + (3x'-5y'+6z')$

$= \alpha(-x-y+2z, 3x-5y+6z) + (-x'-y'+2z', 3x'-5y'+6z')$

$= \alpha f(x, y, z) + (x', y', z')$

$= \alpha f(U) + f(V)$

donc f est une application linéaire

b- $f(e_1) = (1, 1, 2)$ et $f(e_2) = (1, -1, 3)$

donc $M(f B_2, B_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$

$*\, g(v_1) = (1,3) = e_1 + 3e_2 \,,\; g(v_2) = (-1,-5) = -e_1 - 5e_2 \,,\; g(v_3) = (2,6) = 2e_1 + 6e_2$

donc $M(g\, B_3\, B_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

$*\; M(f o g\, B_3, B_3)$

$$\underset{B_3}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{g} \underset{B_2}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{f} \underset{B_3}{\mathbb{R}^3}$$

$$M(fog(B_3, B_3)) = M(f\, B_2\, B_3)\, M(g\, B_3\, B_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -4 & 4 & -4 \\ 7 & -17 & 22 \end{pmatrix}$$

$*\; M(g o f\, B_2 B_2)$

$$\underset{B_2}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{f} \underset{B_3}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{g} \underset{B_2}{\mathbb{R}^2}$$

$$M(gof(B_2 B_2)) = M(g\, B_3 B_2)\; M(f\, B_2\, B_3)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$$

l'autre methode

$$Mat(fog(B_3 B_3)) = Mat(f\, B_2 B_3)\; M(g\, B_3\, B_2)$$

$$fog(v_2) = f(g(v_2))$$

$$= f(-1,-5) = (-6, 4, 17)$$

$$= 6v_1 + 4v_2 - 17v_3$$

$$fog(v_3) = f(2,6) = (8, -4, 22)$$

$$= 8v_1 - 4v_2 + 22v_3$$

$$Mat\; fog\; B_3 B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -4 & 4 & -4 \\ 7 & -17 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$\checkmark.\; M(gof\, B_2 B_2) = Mat(g\, B_3 B_2)\; Mat\; f(B_2\, B_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$$

Rattrapage D'Algebre2 (2010-2011)

Exercice V.

C- calcul de $(f\circ g)(x,y,z)$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$(f\circ g)(x,y,z) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = (\alpha,\beta,\gamma)$

alor $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = Mat(f\circ g\ B_3 B_3)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -6 & 8\\ -4 & 4 & -4\\ 7 & -17 & 22\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-6y+8z\\ -4x+4y-4z\\ 7x-17y+22z\end{pmatrix} = (f\circ g)(x,y,z) = (2x-6y+8z, -4x+4y-4z, 7x-17y+22z)$

$(f\circ f)(x,y,z) = (2x+6y), (10x+26y)$

d Determiner

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$(x,y)\longrightarrow(x+y, x-y, 2x+2y)$

$(x,y)\in\ker f \Leftrightarrow \begin{cases}(x,y)\in\mathbb{R}^2\\ \text{et}\\ f(x,y)=0_{\mathbb{R}^3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x,y)\in\mathbb{R}^2\\ \text{et}\begin{cases}x+y=0\\ x-y=0\\ 2x+3y=0\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$

D'ou $\ker f=\{0_{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow$ donc f injective

Théoreme de rang $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim\ker f = 2$

$\mathrm{Im} = ev\langle f(e_1)\, f(e_2)$ $\quad \mathrm{Im} f = sev\langle\{(1,1,2)(1,-1,3)\}\rangle$

+CLUB NAJAH+
UCD.FS ELJADIDA
LE PRESIDENT

donc $\dim \operatorname{Im} f = 2$ ser$\langle\{(1,1,2),(1,-1,1)\}\rangle$ est une base de $\operatorname{Im} f$

Remarque : $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat} f)$

\# $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} g \iff \begin{cases} (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\ \text{et} \\ g(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}}(0,0) \end{cases}$

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + 6z = 0 \end{cases}$

Résolition (S)

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3l_1 - l_2 \end{matrix}$$

$\operatorname{rg}(S) = 2$ onprend x, y inconny principal et z sécondere

$(S) \iff \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ y = \frac{3}{2} y \end{cases}$ $\quad z \in \mathbb{R}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} z \\ y = -\frac{3}{2} z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \iff (x,y,z) = \left(\frac{1}{2}z, -\frac{3}{2}z, z\right) = z\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, z\right)$

Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{ser}\langle\{(1,3,2)/2)\}\rangle$

$\dim \operatorname{Ker} f = 1$

On endeduit. Th de rang $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} g = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$

donc g n'est pas injective

2- On a

D'où $\mathbb{R}^2$ $\quad f_1 = e_1 + e_2 = (1,1)$

$f_2 = e_1 - e_2 = (1,-1)$

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

et d'où $\mathbb{R}^3$

$w_1 = V_1 - V_2 + V_3 = (1, -1, 1)$

$w_2 = V_1 + V_2 - V_3 = (1, 1, -1)$

$w_3 = -V_1 + V_2 + V_3 = (-1, 1, 1)$

On pose : $B'_2 = \{f_1, f_2\}$, $B'_3 = (w_1, w_2, w_3)$

car $d(B'_2) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ pour montrer que B'_2 est base il suffit de montrer que B'_2 est libre (ou generatrice) $\mathbb{R}^2$

$$rg(B'_2) = rg\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}L_1\\L_2\end{array} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ l_2 - l_1\end{array} = 2$$

donc B'_2 est libre c'est une bas de $\mathbb{R}^2$

$$rg(B'_3) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l}l_1\\l_2\\l_3\end{array} = 3$$

donc B'_3 est libre et $card(B'_3) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

alors B'_3 c'est une base de $\mathbb{R}^3$

3- La matrice de pasage de B_2 a B'_2

est : $P = Mat(id_{\mathbb{R}^2}, B'_2, B_2)$

$w_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ Inverse de P

considéron de systeme

$$(S) \quad P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a + b \\ y = \frac{1}{2}(a - b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

D'où $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b- Matrice de passage de B'_3 à B'_3

est $Q = Mat(id_{\mathbb{R}^3}, B'_3, B_3)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

calcul de Q^{-1}

soit la cystème

$(S') = Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Résolution de (S')

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 0 & a+b \\ 0 & -2 & 2 & c-a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 2 & b+c \end{array}\right)$

$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=a \\ y=\frac{1}{2}(a+b) \\ z=\frac{1}{2}(b+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}(a+c) \\ y=\frac{1}{2}(a+b) \\ z=\frac{1}{2}(b+c) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ D'où $Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4- a- $Mat(f, B'_2, B_3) = ?$

$\underset{B'_2}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \underset{B_3}{\mathbb{R}^3}$

Méthode directe

$f(e_1) = f(1,1) = (2,0,5) = 2V_1 + 0V_2 + 5V_3$

$f(e_2) = f(1,-1) = (0,2,-1) = 0V_1 + 2V_2 + 5V_3)$

D'où $= Mat(f, B'_2, B_3) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array}$

Méthode utilisant la matrice de passage

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ B'_2 & & B_2 & & B_3 \end{array}$$

$$\mathbb{R}^2_{B'_2} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3_{B_3}$$

$\mathrm{Mat}\, f(B'_2, B_3) = M(f\, B'_2\, B_3) = \mathrm{Mat}(f\, B_2\, B_3)\,\mathrm{Mat}(id_{\mathbb{R}^2}\, B'_2\, B_2)$

d'où $M(f\, B'_2\, B_3) = \mathrm{Mat}\, f(B_2\, B_3) \cdot P$

on a alors $\mathrm{Mat}(f\, B'_2, B_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

b- $\mathrm{Mat}\, f(B'_2\, B'_3) = ?$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3 \\ B_2 & & B'_2 & & B_3 & & B'_3 \end{array}$$

$$\mathbb{R}^2_{B'_2} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3_{B'_3}$$

$\mathrm{Mat}\, f(B'_2\, B'_3) = \mathrm{Mat}(id_{\mathbb{R}^3}\, B_3 B'_3)\,\mathrm{Mat}(f\, B'_2, B_3) = Q^{-1}\, \cancel{M(f B'_2 B_3)}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Mat}(f\, B'_2\, B'_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

c- $M(g\, B'_3\, B'_2)$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ B'_3 & & B_3 & & B_2 & & B'_2 \end{array}$$

D'où $\mathrm{Mat}(g\, B'_3, B'_2) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}\, g(B_3\, B_2)\, Q$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ +4 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 16 & -12 & 0 \\ -14 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 0 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

d - $f \circ g$

$$\underset{B'_3}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{B_3}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{g} \underset{B_3}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{id} \underset{B'_3}{\mathbb{R}^3}$$

$$Mat(f\circ g\, B'_3\, B'_3) = O^{-1}\, Mat\, f\circ g\,(B_3 B_3)\,\varphi$$

φ = systm depasage de B_3 à B'_3

$$= Mat(id_{\mathbb{R}^3}\, B'_3\, B_3)$$

$$= Mat(id_{\mathbb{R}^3}\, B'_3,\, B_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -4 & 4 & -4 \\ 7 & -17 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$= \varphi$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -12 & 0 \\ -12 & 4 & 4 \\ 46 & -32 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 2 \\ 23 & -16 & -1 \end{pmatrix}$$

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

$$= \begin{pmatrix} 31 & 22 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 17 & -14 & 1 \end{pmatrix}$$

5 -

a - $(x+y,\ x-y,\ 2x+3y) = (a, b, c)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \\ 2x+3y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ 2y=a-b \\ y=c-2c \end{cases} \begin{cases} x+y=a \\ 2y=a-b \\ 0=-2c+5a-b \end{cases}$$

*) si $-2c+5a-b=0$ alors le systeme

devien $\begin{cases} x+y=a \\ y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \\ y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow S=\{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$

~~alors les~~ *) si $-2c+5a-b\neq 0$

alors le system est incompatible et ona ;

$S=\varphi$

EXERCICE : 2

1- le determinant de (S_m)

$$(S_m)\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=0 \end{cases} \quad S_m = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & (m-1) \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(S_m) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(S_m) = (m-1)0 - 1(1-m) \Leftrightarrow$$

$$\det(S_m) = m-1$$

$$\det(S_m) = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

2- 1^er^ cas $m \neq 1 \Rightarrow \det(S_m) \neq 0$

$\Rightarrow$ S_m est de cramer solution unique

$$x = \begin{vmatrix} (m+1) & 1 & 1 \\ m & 1 & (m-1) \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} \Big/ m-1 = \frac{m(2+m-m^2)}{m-1}$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & (m+1) & 1 \\ m & m & (m-1) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Big/ m-1 = \frac{m+1}{m-1}$$

et

$$z \begin{vmatrix} 1 & 1 & (m+1) \\ m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} \Big/ (m-1) = \frac{m(m^2-m-2)}{m-1}$$

2^er^ cas $m=1 \Rightarrow \det(S) = 0$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

donc $r = 2 < 3 = p$

$$D_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+2-1-1 = 1 \neq 0$$

(S_1) n'est pas compatibel

donc S solution $\{\} = \emptyset$

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques et d'Informatique

Filière : **S.M.P.C** Semestre : **2** A.U : **2009 - 2010**

Module: **Mathématiques 2** Elément de module: **Algèbre 2**

EXAMEN - Rattrapage

EXERCICE 1 : 1) Soit f une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^4$.
On suppose que f est injective. f est - elle - surjective ? Justifier.

2) Soit h un endomorphisme de $\mathbf{R}^4$.
On suppose que h n'est pas surjectif. h est - il - injectif ? Justifier.

EXERCICE 2 : 1) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice.
Donner le rang de M.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice.
Calculer le rang de la matrice ${}^tAA$.

EXERCICE 3 : On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

Pour quelles valeurs de λ, la matrice D est - elle - inversible ?

EXERCICE 4 : Soit la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 2-a & -1 & 3 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 2 & 3 & 2-a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

1) Calculer, suivant les valeurs de a, le rang de M_a.
2) Déterminer les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

3) A est - elle - diagonalisable ? Justifier.

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques et d'Informatique

Filière : **S.M.P.C** Semestre : **2** A.U : **2009 - 2010**
Module: **Mathématiques 2** Elément de module: **Algèbre 2**

EXAMEN - Rattrapage

CORRIGE

EXERCICE 1 : 1) Soit f une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^4$.

On suppose que f est injective. D'après le théorème du rang, on a :

$\dim \mathbf{R}^3 = 3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. Or f est injective $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$ $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3 \neq \dim \mathbf{R}^4 (= 4)$. Donc f n'est pas surjective.

Autre réponse : Si f est surjective, alors f serait bijective puisque f est injective.

Ceci est impossible pour une application linéaire entre deux e.v de dimensions non égales. ($\dim \mathbf{R}^3 \neq \dim \mathbf{R}^4$)

2) Soit h un endomorphisme de $\mathbf{R}^4$.

On suppose que h n'est pas surjectif. Si h est injectif alors $\dim \operatorname{Ker} h = 0$ et par suite $\dim \mathbf{R}^4 = 4 = \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Im} h = \dim \operatorname{Im} h$. D'où $\mathbf{R}^4 = \operatorname{Im} h$ c.à.d h est surjectif, impossible.

EXERCICE 2 : 1) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice.

On a M est une matrice d'ordre $(1,6)$. D'où $\operatorname{rg}(M) \leq \inf(1,6)$

c.à.d $\operatorname{rg}(M) \leq 1$. Comme M est non nulle, alors $\operatorname{rg}(M) = 1$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice.

On a A d'ordre $(1,4)$ et ${}^tA$ d'ordre $(4,1)$. D'où ${}^tAA$ est une matrice carrée d'ordre 4 :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Comme $C_2 = 2C_1$, $C_3 = 3C_1$ et $C_4 = 4C_1$, alors $\operatorname{rg}({}^tAA) = 1$.

EXERCICE 3 : On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).,$$

On a $\det(D) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$
D est alors inversible $\Leftrightarrow \lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 2$.

EXERCICE 4 : Soit la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 2-a & -1 & 3 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 2 & 3 & 2-a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).,$

1) On a $\det(M_a) = 3 - 7a + 5a^2 - a^3 = -(a-1)^2(a-3)$.

Si $a \neq 1$ et $a \neq 3$ alors $\det(M_a) \neq 0$ et par suite $\text{rg}(M_a) = 3$.

Si $a = 1$ alors la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ extraite de M_1 est inversible puisque son det = -1. D'où $\text{rg}(M_1) = 2$.

Si $a = 3$ alors la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ extraite de M_3 est inversible puisque son det = 1. D'où $\text{rg}(M_3) = 2$.

2) Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme $\det(A - XI_3) = \det(M_X) = -(X-1)^2(X-3)$.

Donc les valeurs propres de A sont 1 et 3. (1 v.p double et 3 v.p simple)

3) A est diagonalisable $\Leftrightarrow \dim E_A(1) = 2 \Leftrightarrow \text{rg}(A - I_3) = \text{rg}(M_1) = 1$.

Or, d'après la question 1) $\text{rg}(M_1) = 2$, donc A n'est pas diagonalisable.

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

EXERCICE 3 : On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).,$$

On a $\det(D) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$
D est alors inversible $\Leftrightarrow \lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 2$.

EXERCICE 4 : Soit la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 2-a & -1 & 3 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 2 & 3 & 2-a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).,$

1) On a $\det(M_a) = 3 - 7a + 5a^2 - a^3 = -(a-1)^2(a-3)$.

Si $a \neq 1$ et $a \neq 3$ alors $\det(M_a) \neq 0$ et par suite rg $(M_a) = 3$.

Si $a = 1$ alors la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ extraite de M_1 est inversible puisque son det = -1. D'où rg $(M_1) = 2$.

Si $a = 3$ alors la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ extraite de M_3 est inversible puisque son det = 1. D'où rg $(M_3) = 2$.

2) Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme $\det(A - XI_3) =$
$= \det(M_X) = -(X-1)^2(X-3)$.

Donc les valeurs propres de A sont 1 et 3. (1 v.p double et 3 v.p simple)

3) A est diagonalisable $\Leftrightarrow \dim E_A(1) = 2 \Leftrightarrow$ rg $(A - I_3) =$ rg$(M_1) = 1$.

Or, d'après la question 1) rg $(M_1) = 2$, donc A n'est pas diagonalisable.

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques et d'Informatique

Filières : S.M.C et S.M.P **Semestre** : 2 **A.U** : 2009 - 2010

Module : Mathématiques2 **Elément de module** : Algèbre 2

EXAMEN - Session Normale

EXERCICE : Montrer que la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ est inversible et donner son inverse P^{-1}.

PROBLEME : Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

On munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ de sa base canonique $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Soit f_λ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ défini par :

$f_\lambda(e_1) = \lambda e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $f_\lambda(e_2) = e_1 + \lambda e_2 + e_3 + e_4$,

$f_\lambda(e_3) = e_1 + e_2 + \lambda e_3 + e_4$, $f_\lambda(e_4) = e_1 + e_2 + e_3 + \lambda e_4$.

PARTIE I :

1) a) Définir la matrice M_λ associée à f_λ relativement à la base B.
   b) Donner l'image par f_λ d'un vecteur $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$.

2) a) Calculer det (M_λ) .
   b) Pour quelles valeurs de λ, la matrice M_λ est-elle inversible ?

3) a) Discuter, suivant les valeurs de λ, le rang de l'endomorphisme f_λ .
   b) En déduire dim Ker (f_1) , dim Ker (f_0) et dim Ker (f_{-3}).

PARTIE II :

Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Exprimer M_λ en fonction de λ et des matrices A et I_4.
2) Déduire de det (M_λ) le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ de la matrice A.
3) Quelles sont les valeurs propres de A ?
4) Calculer rg$(A + I_4)$ et en déduire que A est diagonalisable.
5) Donner les vecteurs propres associés aux valeurs propres de A.

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques et d'Informatique

Filière : **SMPC2** Module: **Maths2** Elément de module: **Algèbre2** A.U : **2009 - 2010**

EXAMEN - Session Normale

CORRIGE

EXERCICE : La matrice P est inversible puisque $\det(P) = -2$.

$$\text{On a } \operatorname{com}(P) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}{}^t\operatorname{com}(P) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $PP^{-1} = I_3$

PROBLEME : Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
On munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ de sa base canonique $\mathrm{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Soit f_λ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ défini par :

$$f_\lambda(e_1) = \lambda e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \quad f_\lambda(e_2) = e_1 + \lambda e_2 + e_3 + e_4,$$
$$f_\lambda(e_3) = e_1 + e_2 + \lambda e_3 + e_4, \quad f_\lambda(e_4) = e_1 + e_2 + e_3 + \lambda e_4.$$

PARTIE I :

1) a) La matrice $M_\lambda = M(f_\lambda, \mathrm{B})$ est d'ordre 4 et elle est égale à :

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

b) Soit $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$. Puisque f_λ est linéaire on a :

$$f_\lambda(x,y,z,t) = f_\lambda(xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4) = xf_\lambda(e_1) + yf_\lambda(e_2) + zf_\lambda(e_3) + tf_\lambda(e_4) =$$

$$= x(\lambda e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + y(e_1 + \lambda e_2 + e_3 + e_4) + z(e_1 + e_2 + \lambda e_3 + e_4) + t(e_1 + e_2 + e_3 + \lambda e_4)$$

$$= (\lambda x + y + z + t)e_1 + (x + \lambda y + z + t)e_2 + (x + y + \lambda z + t)e_3 + (x + y + z + \lambda t)e_4.$$

Donc:
$$f_\lambda(x,y,z,t) = (\lambda x + y + z + t, x + \lambda y + z + t, x + y + \lambda z + t, x + y + z + \lambda t) \in \mathbf{R}^4.$$

Autre façon pour trouver ce résultat:

Posons $f_\lambda(x,y,z,t) = (a,b,c,d)$. Ceci est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda x + y + z + t \\ x + \lambda y + z + t \\ x + y + \lambda z + t \\ x + y + z + \lambda t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$f_\lambda(x,y,z,t) = (\lambda x + y + z + t, x + \lambda y + z + t, x + y + \lambda z + t, x + y + z + \lambda t) \in \mathbf{R}^4.$$

2) a) Pour calculer $\det(M_\lambda)$, on commence par ajouter à la 1ère colonne les 3 autres. Les termes de cette colonne sont tous égaux à $\lambda + 3$, et alors $\det(M_\lambda)$ sera multiplié par $\lambda + 3$.

Les termes de la ligne 1 et de la colonne 1 sont tous alors égaux à 1.

Après les opérations $c_2 - c_1$, $c_3 - c_1$ et $c_4 - c_1$ et en développant suivant la ligne 1, on obtient :

$$\det(M_\lambda) = (\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-1)^3.$$

b) M_λ est inversible $\Leftrightarrow \det(M_\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -3$ et $\lambda \neq 1$.

3) a) On a $\det(M_\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-1)^3$.

<u>1^{er} *cas*</u> : Si $\lambda \neq -3$ et $\lambda \neq 1$ alors M_λ est inversible et par suite $\mathrm{rg}(M_\lambda) = 4$.

<u>$2^{ème}$ *cas*</u> : Si $\lambda = -3$ alors $\det(M_{-3}) = 0$ et $M_{-3} \in M_4(\mathbf{R}) \Rightarrow \mathrm{rg}(M_{-3}) \leq 3$.

Comme $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ alors $\mathrm{rg}(M_{-3}) = 3$

<u>$3^{ème}$ *cas*</u> : Si $\lambda = 1$ alors $\det(M_1) = 0$ et $M_1 \in M_4(\mathbf{R}) \Rightarrow \mathrm{rg}(M_1) \leq 3$.

Comme toutes les lignes et donc toutes les colonnes sont identiques et M_1 est non nulle alors $\mathrm{rg}(M_1) = 1$.

b) On a dim Ker (f_{-3}) = dim $\mathbf{R}^4$ - $\mathrm{rg}(M_{-3})$ $\Rightarrow$ dim Ker (f_{-3}) = 1.

On en déduit que f_{-3} n'est ni injective ni surjective.

De même, dim Ker (f_1) = 3 et f_1 n'est ni injective, ni surjective.

D'autre part, M_0 est inversible $\Rightarrow$ f_0 est bijective et alors dim Ker (f_0) = 0.

PARTIE II :

Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) On a $M_\lambda = A + \lambda I_4$.

2) On a $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \det(M_{-\lambda}) = (-\lambda+3)(-\lambda-1)^3 = (\lambda-3)(\lambda+1)^3$

3) Les valeurs propres de A sont -1 et 3. (3 v.p simple et -1 v.p triple)

4) On a $\mathrm{rg}(A+I_4) = \mathrm{rg}(M_1) = 1$ d'après (3) a) PARTIE I) .

D'où $\dim \mathrm{Ker}\,(A+I_4) = 3 =$ l'ordre de multiplicité de la v.p $-1 = \dim E_A(-1)$

On en déduit alors que A est diagonalisable et par suite A est semblable à une matrice diagonale D de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5) Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont :

$u_1 = (-1,0,0,1)$, $u_2 = (-1,0,1,0)$ et $u_3 = (-1,1,0,0)$.

Le vecteur propre associé à la valeur propre 3 est : $u_4 = (1,1,1,1)$.

<u>**Remarque**</u> : Puisque A est diagonalisable, la famille $C = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base de l'e.v $\mathbf{R}^4$ formée de vecteurs propres .

Soit P la matrice de passage la base B à la base C, c.à.d

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On a donc : } P^{-1}AP = D.$$

$$\text{avec } P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$